

**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап**

*21 січня – 22 січня 2023 року, м. Львів*

**7 клас**

1. Чи є простим число  $(1 + 2 + 3 + \dots + 2021 + 2022)^{2023} + (2 + 3 + \dots + 2021 + 2022 + 2023)^{2022}$ ?  
Відповідь обґрунтувати.
2. У магазині "Дві дев'ятки" кожна одиниця товару коштує деяку кількість гривень і 99 копійок. Миколка заплатив за покупку 76 грн і 89 коп. Скільки одиниць товару купив Миколка? Відповідь обґрунтувати.
3. Чи можна 90 монет викласти у 13 стовпчиків так, щоб у жодних двох стовпчиках не було однакової кількості монет? Відповідь обґрунтувати.
4. Блоха невтомно стрибає вздовж прямої лінії кожної секунди або праворуч, або ліворуч, спочатку на 1 см, потім на 2 см, потім на 3 см, а тоді знову на 1 см, 2 см, 3 см і так далі. При цьому напрямок стрибка кожної секунди вибирається довільно (праворуч або ліворуч) і незалежно від напрямку стрибка у попередні моменти часу. Чи може блоха на 2023 стрибку потрапити в початкову точку? Відповідь обґрунтувати.
5. Є повністю наповнене водою 10-літрова посудина і дві порожні посудини об'ємом 3 л і 5 л. Потрібно частину води (ціле число літрів) вилити, а решту розділити на три однакові за об'ємом частини. Як це зробити? Відповідь обґрунтувати.

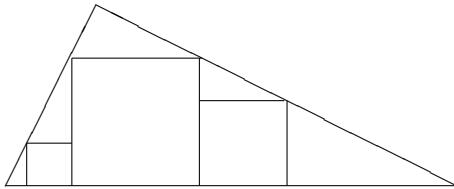
© 2023, Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап**

*21 січня – 22 січня 2023 року, м. Львів*

**8 клас**

1. Є повністю наповнене водою 10-літрова посудина і дві порожні посудини об'ємом 3 л і 5 л. Потрібно частину води (ціле число літрів) вилити, а решту розділити на три однакові за об'ємом частини. Як це зробити? Відповідь обґрунтувати.
2. Нехай  $N = 18 \cdot 18 \cdot 30 \cdot 2023$ . Чому дорівнює відношення суми всіх непарних дільників числа  $N$  до всіх парних його дільників? Відповідь обґрунтувати.
3. Чи можна 275 монет викласти у 23 стовпчики так, щоб у жодних двох стовпчиках не було однакової кількості монет? Відповідь обґрунтувати.
4. Чи є простим число  $4^{2023} + 2023^4$ ? Відповідь обґрунтувати.
5. У трикутник вписано три квадрати з площами 10, 90 та 40 як показано на рисунку.



Знайти площу цього трикутника. Відповідь обґрунтувати.

**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап**

*21 січня – 22 січня 2023 року, м. Львів*

**9 клас**

1. Знайти всі пари цілих чисел  $x, y$  таких, що
- $$4x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2023.$$

Відповідь обґрунтувати.

2. Повним квадратом якого натурального числа є число

$$(10^{2023} + 5)(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2022}) + 1?$$

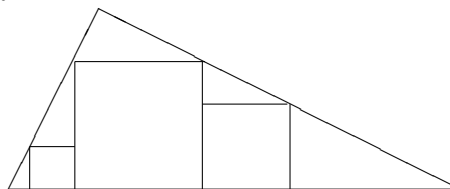
Відповідь обґрунтувати.

3. Чи можна число  $2^{2023}$  подати у вигляді суми деякої кількості послідовних натуральних чисел? Відповідь обґрунтувати.

4. Три паралельних прямих, одна з яких рівновіддалена від двох інших перетинають коло, утворюючи три хорди, довжини яких рівні 38, 38 і 34. Які відстані між прямими? Відповідь обґрунтувати.

5. У трикутник вписано три квадрати з площами 10, 90 та 40 як показано на рисунку. Знайти площу цього трикутника.

Відповідь обґрунтувати.



© 2022, Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап**

*21 січня – 22 січня 2023 року, м. Львів*

**10 клас**

1. Сума трьох ненульових цілих чисел дорівнює нулю. Довести, що подвоєна сума їхніх четвертих степенів є квадратом натурального числа.
2. Знайти остачу від ділення  $2^{202} + 202$  на  $2^{101} + 2^{51} + 1$ . Відповідь обґрунтувати.
3. Довести, що будь-яка медіана трикутника менша, ніж півсума, але більша ніж піврізниця сторін, між якими вона лежить.
4. Знайти всі пари цілих чисел  $x, y$  таких, що
$$4x^3 - 8x^2y + 5xy^2 - y^3 = 2023.$$
Відповідь обґрунтувати.
5. Нехай  $P(x) = (x - 1^2)(x - 2^2) \dots (x - 100^2)$ . Скільки цілих чисел задовольняють нерівність  $P(n) \leq 0$ ? Відповідь обґрунтувати.

© 2023, Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап**

*21 січня – 22 січня 2023 року, м. Львів*

**11 клас**

1. Знайти всі пари цілих чисел  $x, y$  таких, що

$$4x^3 - 8x^2y + 5xy^2 - y^3 - 2023 = 0.$$

Відповідь обґрунтувати.

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4 \operatorname{tg}^2 x + 9 \operatorname{ctg}^2 x = 12 \sin^2 y, \\ 1011 \sin^2 y + 1012 \cos^2 z = 2023. \end{cases}$$

3. Сума трьох ненульових цілих чисел дорівнює нулю. Довести, що подвоєна сума їхніх четвертих степенів є квадратом натурального числа.

4. Знайдіть добуток всіх чисел  $x$  таких, що  $a = x - 2$  є коренем рівняння

$$20x^3 - 88x^2 + 107x - 30 = 0.$$

Відповідь обґрунтувати.

5. Чи можна знайти таке натуральне число  $n \geq 2$ , що число  $2^n$  можна подати у вигляді суми деякої кількості  $k \geq 2$  послідовних натуральних чисел? Наприклад, у випадку  $3^n$  при  $n = 2$  маємо  $3^2 = 2 + 3 + 4$ .

Відповідь обґрунтувати.

6. Для всіх  $a \neq 0$  розв'язати рівняння

$$2|a| \log_{1/2} \left( \frac{|x|}{|a|} \right) = |x - a| + |x + a|.$$

Відповідь обґрунтувати.

© 2023, Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет